

## الموضوع الملاحظة: الثالثة ...

والنكاح:  $X^c = \emptyset \in H$

$H$  - جبر على  $X \Rightarrow X \in H$

★ جبر بورليك:

- ليكن  $(X, d)$  فضاءً مترياً وليكن  $\mathcal{O}$  صف المجموعات المفتوحة في  $(X, d)$  هنا  $(\mathcal{O} \subset 2^X)$ .

**تعريف:** جبر بورليك في الفضاء  $(X, d)$  هو صف الجبر المكوّن من صف المجموعات المفتوحة  $\mathcal{O}$  ونزله  $B_X$  أي أن:

$$B_X = \mathcal{F}_\sigma(\mathcal{O})$$

كل مجموعة من  $B_X$  نسميها مجموعة بوريلية.

**نتيجة 1:**

بما أن  $\mathcal{O} \subset B_X$  فإن كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة بوريلية.

(2) - كل مجموعة منغلقة هي مجموعة بوريلية. (لأنها مغلقة مجموعة مغلقة).

(3) - كل مجموعة متراصة هي مجموعة بوريلية. (لأنها مغلقة ومحدودة)  
(4) - المجموعة  $X$  بوريلية.

★ ملاحظة:

لفرض  $\mathcal{O}$  و  $C$  و  $K$  صف لترتيب صف المجموعات المفتوحة والمغلقة والمتراصة عندئذ يكون:

$$\mathcal{O} \subset B_X, C \subset B_X, K \subset B_X$$

وانهم من ذلك هو الجبر صف التالية.



نمبر هنت: كلفة الصنف:  $\theta$  و  $c$  و  $k$ .

تولد جبر بوريل  $B_X$  أي أن:

$$B_X = \mathcal{F}_\theta(0) = \mathcal{F}_\theta(c) = \mathcal{F}_\theta(k)$$

★ ★ ملاحظة:

يوجد مجموعات أخرى بوريلية وهي: ليست مفتوحة وليست مغلقة وليست مترابطة. كما نلاحظ بذلك.

★ ★ جبر بوريل في  $\mathbb{R}^n$ :

نعلم أن المجموعة  $\mathbb{R}^n$  مزودة بالعناصر ذات الشكل:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ و } x_i \in \mathbb{R}$$

كأن:  $\mathbb{R}^n$  فضاء متري مع كل من:

$$d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ و } x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \text{ و } x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow d_p(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ و } x, y \in \mathbb{R}^n$$

و  $1 \leq p < \infty$

$$d_\infty(x, y) = \sup_i |x_i - y_i| \text{ و } x, y \in \mathbb{R}^n$$

★ وهذه المتراك (الماتريك) متكافئة فيما بينها:

أي يوجد عددين موجبين  $c_1$  و  $c_2$  بحيث يكون:

$$c_1 d'(x, y) \leq d''(x, y) \leq c_2 d'(x, y) \text{ و } x, y \in \mathbb{R}^n$$

★

حيث:  $d'$  و  $d''$  أي متركي من المذكورين أعلاه.

إذن لنزيد  $(\mathbb{R}^n, d)$  للفضاء المتري، حيث  $d$  أي متركي من المذكورين أعلاه.



- يجب مافكرنا منذ البداية يدور في  $(R, d)$  مجموعات مفتوحة ومجموعات مغلقة ومجموعات متناهية وأنواع أخرى من المجموعات الجزئية في  $(R, d)$ .

**تعريف:** جبر بوريل في  $R^n$  هو  $\mathcal{B}_n$  - الجبر المولد بصفت المجموعات المفتوحة  $\emptyset$  في  $(R^n, d)$ .  
أي أن:  $\mathcal{B}_n = \mathcal{F}_\emptyset(\emptyset)$ .

**مبرهنة:** كالمعاد: صفت المجموعات المفتوحة  $\emptyset$  وصفت المجموعات المغلقة  $C$  وصفت المجموعات المتناهية  $K$  تولد جبر بوريل  $\mathcal{B}_n$  أي أن:  
 $\mathcal{B}_n = \mathcal{F}_\emptyset(\emptyset) = \mathcal{F}_\emptyset(C) = \mathcal{F}_\emptyset(K)$

**نتيجة:** إذا مجموعة مفتوحة أو مغلقة أو متناهية في  $R^n$  هي مجموعة بوريلية أي أنها تنتمي إلى  $\mathcal{B}_n$ .  
(ويوجد في  $\mathcal{B}_n$  مجموعات ليست من الأنواع المذكورة).

**ملاحظة:** في حالة  $n=1$  أي المجموعة  $R$  وهي فضاء مترين مع المتر:  $d(x, y) = |x - y|$  و  $x, y \in R$ .  
لنوزب  $\mathcal{B}_1$  جبر بوريل في  $R$  عندئذ:

**مبرهنة:** يمكن توليد جبر بوريل  $\mathcal{B}_1$  بكل واحد من الصنف التالي:

$$\mathcal{J}_1 = \{ ]a, b[ : a, b \in R \}$$

$$\mathcal{J}_2 = \{ [a, b[ : a, b \in R \}$$

$$\mathcal{J}_3 = \{ ]a, b] : a, b \in R \}$$

$$\mathcal{J}_4 = \{ [a, b] : a, b \in R \}$$

$$\mathcal{J}_5 = \{ ]-\infty, a[ : a \in R \}$$



$$J_6 = \{ [-\infty, a] : a \in \mathbb{R} \}$$

$$J_7 = \{ [b, +\infty[ : b \in \mathbb{R} \}$$

$$J_8 = \{ [b, +\infty[ : b \in \mathbb{R} \}$$

أيضا:

$$B_{\mathbb{R}} = \mathcal{F}_0(J_1) = \mathcal{F}_0(J_2) = \dots = \mathcal{F}_0(J_8)$$

بما أن  $J_i \subset B_{\mathbb{R}}$  حيث  $i = 1, 2, \dots, 8$  فإن كل مجال مفتوح وكل مجال مغلق وكل مجال نصف مفتوح وكل مجال نصف مغلق.

نقطة 1:

$$]-\infty, a[, ]-\infty, a], [a, +\infty[, [a, +\infty[$$

كل هذه المجالات هي مجموعة بوريلية.

2- كل مجموعة ومجموعة العنصر  $\{x\}$  هي مجموعة بوريلية.

3- كل مجموعة منتهية هي مجموعة بوريلية.

4- كل مجموعة عددية هي مجموعة بوريلية وبشكل خاص

فإن المجموعات:  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{P}$

العددية العادية، الصحيحة، الطبيعية

هي مجموعات بوريلية.

5- كل مجموعة عددية لها أكثر تكون مجموعة بوريلية.

ملاحظة:

بالعودة إلى جبر بوريل  $B_{\mathbb{R}^n}$  لدينا ما يلي:

1- المجموعات ذات الشكل:  $[a_1, b_1[ \times [a_2, b_2[ \times \dots \times [a_n, b_n[$

$$= [a_1, b_1[ \times [a_2, b_2[ \times \dots \times [a_n, b_n[$$

حيث  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$= \bigcap_{i=1}^n [a_i, b_i[$$

هي مجموعات بوريلية (أي تنتمي إلى  $B_{\mathbb{R}^n}$ )



2. المجموعات ذات الشكل:

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] = \bigcap_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

في مجموعات بوريلية في  $B_{\mathbb{R}^n}$ .3. نضيف أيضاً أن الصفوف التالية تولد  $B_{\mathbb{R}^n}$ :

$$S_1^n = \left\{ \bigcap_{i=1}^n [a_i, b_i] : a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$$

$$S_2^n = \left\{ \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i] : a_i, b_i \in \mathbb{R} \right\} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$$

أي أن:

$$B_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{F}_\sigma(S_1^n) = \mathcal{F}_\sigma(S_2^n)$$

انتهى الفصل الأول

تمارين

تمرين 1: لكن  $X = \mathbb{R}$  مجموعة الأعداد الحقيقية ونك  $A \subset \mathbb{R}$  مجموعة جزئية نقول أن  $A$  مجموعة متناظرة إذا كان:

$$x \in A \iff -x \in A$$

لنوجد  $S$  أصغر المجموعات المتناظرة في  $\mathbb{R}$ .

المطلوب:

① - أثبت أن  $S$  شكل  $\emptyset$  - جبر على  $\mathbb{R}$ .② - بين أي المجموعات التالية ينتمي إلى  $S$ :

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow A = [-1, +1], B = [0, 2], C = ]-8, +8[$$

$$D = [-5, -1] \cup [1, 5]$$

\* الحل:

- لنثبت أولاً أن  $S$  شكل  $\emptyset$  - حلقة على  $\mathbb{R}$ .(س 12) لكن  $A, B \in S$  هذا يعني أن  $A, B$  مجموعتين متناظرتين.



ولنثبت أن  $A \cap B \in S$  ؟

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Leftrightarrow x \in A, x \in B \\ &\Leftrightarrow -x \notin A, -x \notin B \\ &\Leftrightarrow -x \in A \cap B \end{aligned}$$

$A \cap B \in S$  : أيات : (225)

لكن  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$  ولنثبت أن  $A_1, A_2, \dots \in S$  لدينا  $(A_i \in S)$  أي أن المجموعات  $A_i$

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &\Leftrightarrow x \in A_{i_0} \\ &\Leftrightarrow -x \notin A_{i_0} \\ &\Leftrightarrow -x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \end{aligned}$$

أي :  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$

$$\left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \in S$$

لذلك فإن  $S$  مغلق تحت كل -  $R$  و  $U$

(3) - نثبت أن  $R \in S$

لدينا  $-x \in R \Leftrightarrow x \in R$  أي أن  $R \in S$  بنصف يتحقق  $S$  -  $R$  أي  $R \in S$

طلب ثابت : (ب)

ليكن  $1 \in N \Leftarrow 1 \notin N$  أي أن المجموعة غير متناقضة أي أن  $N \in S$

في أي حال  $z \in Z$  يكون  $-z \in Z$   $z \in S \Leftarrow -z \in Z$

بأي حال  $Q \in S$  ونثبت أن  $Q \in S$  ونثبت أن  $Q \in S$

$$-x \in [-1, +1] \Leftrightarrow x \in [-1, +1] \text{ أي}$$

$$[-1, +1] \in S$$

$$x \in [0, 2[ \text{ ليكن}$$

$$1 \in [0, 2[ \text{ لدينا } 1 \notin [0, 2[ \text{ بينما}$$

$$[0, 2[ \notin S \text{ أي أن}$$



بشكل مشابه نثبت أن  $\{5, -5, 1, -1\} \in \mathcal{C}$

وكذلك  $\{5, -5, 1, -1\} \in \mathcal{C}$

نثبت أن  $X = R^n$  ، نقول أنه مجموعة  $A \subset R^n$  ،  
متناظرة إذا كانت :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \iff -x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \in A$$

لنفرض بـ  $\mathcal{C}$  لمصف المجموعات المتناظرة في  $R^n$ .

المطلوب :

أ- نثبت أن  $\mathcal{C}$  يشكل جبر على  $R^n$ .

ب- هذه المجموعات التالية متناظرة في  $R^2$  :

$$A_1 = \text{مجموعة الدوائر الشكل } x^2 + y^2 = r^2$$

$$A_2 = \text{مجموعة الدوائر الشكل } (x+1)^2 + (y-2)^2 = r^2$$

$$A_3 = \text{مجموعة القطوع الناقصة } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$A_4 = \text{مجموعة المستقيمت } x + y = c$$

$$A_5 = \text{مجموعة المستقيمت } y = x$$

$$A_6 = R$$

المطلوب الحل :

لكن  $X$  مجموعة غير متناهية ،  
الوحيدة العنصر :  $\mathcal{C} = \{ \{x\} : x \in X \}$  ،  
فأثبت

المطلوب :

(1) ما هو - الجبر الذي يولده المصف  $\mathcal{H}$  في الحالات التالية :

(P) - مجموعة منتهية .

(C) - مجموعة محدودة .

(I) - مجموعة غير محدودة .

(2) ما هو صف وتكوين المولدة بالمصف  $\mathcal{H}$  في الحالات (أ) و (ب) و (ج) :



الحل: (أ) - نقرنها أن  $X$  مجموعة منتهية:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

فيكون:

$$H = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}\}$$

ولنتب أن:

$$\therefore \mathcal{F}_0(H) = 2^X$$

لدينا دوماً

$$\mathcal{F}_0(H) \subset 2^X$$

لكن  $A$  مجموعة من  $2^X$  هذا يعني أنه يوجد  $A$  على الأكثر  $n$  عناصر:

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \quad k \leq n$$

$$= \bigcup_{i=1}^k \underbrace{\{x_i\}}_{\in H} \in \mathcal{F}_0(H)$$

فذلك ينتج أن  $A \in \mathcal{F}_0(H)$  مع أي  $A$  من  $2^X$  أي أن  $2^X \subset \mathcal{F}_0(H)$    
 فذلك يكون:  $\mathcal{F}_0(H) = 2^X$ .

(ب) - \*

نقرنها الآن أن  $X$  مجموعة غير منتهية لكنها عدودة   
 ولنقرنها أن:  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$    
 فيكون في هذه الحالة:

$$H = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \dots\} \subset 2^X$$

$$\therefore \mathcal{F}_0(H) = 2^X \quad \text{ولنتب أن}$$

$$\mathcal{F}_0(H) \subset 2^X \quad \text{لدينا دوماً}$$



لتكن  $A$  مجموعة من  $2^X$ . هذا يعني أن  $A$  مجموعة مكونة  
 من أكثر (مجموعة أو منتهية) :

$$A = \{ \pi_{k_1}, \pi_{k_2}, \pi_{k_3}, \dots, \pi_{k_n}, \dots \}$$

$$= \underbrace{\{ \pi_{k_1} \}}_{\in H} \cup \underbrace{\{ \pi_{k_2} \}}_{\in H} \cup \dots \cup \underbrace{\{ \pi_{k_n} \}}_{\in H} \cup \dots \in \mathcal{F}_\sigma(H)$$

من ذلك يتبع أن :  $A \in \mathcal{F}_\sigma(H)$   
 وبالتالي :

$$2^X \subset \mathcal{F}_\sigma(H)$$

$$\mathcal{F}_\sigma(H) = 2^X \quad \text{أي أن :}$$

(ج) نعرف الآن أن  $X$  مجموعة غير معدودة.  
 فيكون :  $H = \{ \{x\} : x \in X \} \subset 2^X$   
 ويكون :

$$\mathcal{F}_\sigma(H) = \{ A \subset X : A \text{ معدودة أو } A^c \text{ معدودة} \} \neq 2^X$$

$$D(H) = \mathcal{F}_\sigma(H) \quad \text{نظام أن}$$

لذلك يكون : (أ)

$$D(H) = 2^X \quad \text{إذا كانت } X \text{ مجموعة منتهية}$$

$$D(H) = 2^{\overline{X}} \quad \text{إذا كانت } X \text{ مجموعة معدودة}$$

$$D(H) = \{ A \in 2^X : A \text{ معدودة أو } A^c \text{ معدودة} \} \quad \text{إذا كانت } X \text{ مجموعة غير معدودة}$$